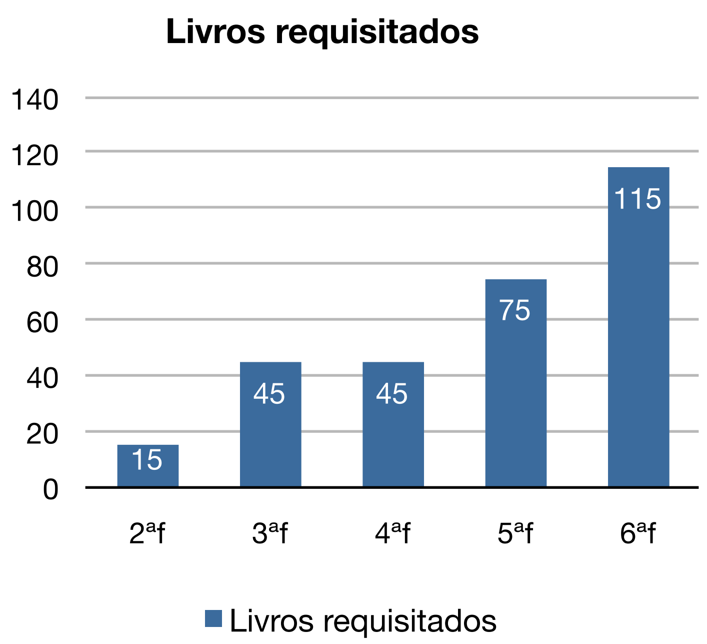
Proposta de resolução da prova modelo para o Exame de Acesso

MATEMÁTICA

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

1. A frequência absoluta acumulada N_i do número de livros requisitados, durante uma semana, numa escola, é apresentada no seguinte diagrama de barras:



1.1. Responda às seguintes questões:

Para responder a estas questões é mais simples começar por preencher a tabela da questão 1.2, e depois basta consultar a tabela.

1.1.1. Quantos livros foram requisitados na 3ª feira?

Olhando para a primeira coluna da tabela, na 3ª feira foram requisitados 30 livros.

1.1.2. A biblioteca esteve encerrada num dos dias. Em que dia foi?

O único dia em que não foram requisitados livros foi a 4ª feira.

1.1.3. Em que dia foram requisitados mais livros?

Olhando para a primeira coluna da tabela, na 6ª feira foram requisitados mais livros.

1.1.4. Quantos livros foram requisitados durante a semana?

Na última célula da segunda coluna está a soma da primeira coluna.

1.1.5. Em média, quanto livros foram requisitados em cada dia da semana?

Foram requisitados 115 livros em 5 dias, o que dá portanto uma média de $\dfrac{115}{5} = 23$ livros por cada dia da semana.

1.2. Construa a tabela das frequências simples e acumuladas:

Dia	Freq. abs. n_i	Freq. abs. ac. N_i	Freq. rel. f_i	Freq. rel. ac. F_i
2ª feira	15	15	15/115	15/115
3ª feira	30	45	30/115	45/115
4ª feira	0	45	0/115	45/115
5ª feira	30	75	30/115	75/115
6ª feira	40	115	40/115	115/115

2. Sendo $A_p^n = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, $n \geqslant p,\ n,\ p \in \mathbb{N}$, mostre que $A_p^n = n\, A_{p-1}^{n-1}$.

Calculando A_{p-1}^{n-1} a partir da definição tem-se

$$A_{p-1}^{n-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-[p-1])!} = \frac{(n-1)!}{(n-p)!} \Rightarrow n\, A_{p-1}^{n-1} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!} = A_p^n,$$

pois por definição de factorial tem-se $n! = n \times (n-1)!$.

3. Calcule o seguinte limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2n+4} - \sqrt{2n+3}\right).$$

Temos uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$ e portanto vamos multiplicar e dividir pelo conjugado:

$$\frac{(\sqrt{2n+4} - \sqrt{2n+3}) \times (\sqrt{2n+4} + \sqrt{2n+3})}{\sqrt{2n+4} + \sqrt{2n+3}} = \frac{2n+4-2n-3}{\sqrt{2n+4} + \sqrt{2n+3}} = \frac{1}{\sqrt{2n+4} + \sqrt{2n+3}},$$

pelo que o limite é zero.

4. Sejam $A(1,0)$ e $B(0,1)$ dois pontos de $\mathbb{R}^2$.

4.1. Determine a equação da reta que passa por A e B.

A equação da reta é da forma $y = mx + b$. Em particular é preciso ter $0 = m \times 1 + b$ e $1 = m \times 0 + b$. Daqui sai $b = 1$ e $m = -1$. A equação é $y = -x + 1$.

4.2. Determine um ponto C no eixo dos x, tal que $\triangle ABC$ seja um triângulo retângulo.

Seja $C = (0,0)$.

4.3. Determine um ponto D (diferente de C) no eixo dos x, tal que $\triangle ABD$ seja um triângulo isósceles.

Seja $D = (-1, 0)$.

5. Considere a função real de variável real f definida por $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$.

5.1. Calcule o limite $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

Como $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, vem logo $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \dfrac{(x + 1)^2}{x + 1} = x + 1$. Logo o limite em $x = -1$ dá zero.

5.2. Identifique o domínio de f e calcule f'.

Tem-se $D(f) = \{x \mid x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Pela alínea anterior a derivada, evidentemente, é igual à derivada de x+1 que é 1.

FIM