UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

Exame de Acesso
ACFES Maiores de 23; Acesso Específico

Matemática

PROVA MODELO - proposta de resolução

- INSTRUÇÕES -

- Deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- A prova é constituída por 5 página e termina com a palavra FIM. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Nas questões que envolvam cálculos ou demonstrações o aluno deve explicitar todos os passos necessários.
- Não é permitido usar máquina de calcular nem elementos de consulta.
- O exame tem a duração de 2 horas e 30 minutos.

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter

1. (3 valores) Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, uma a uma, 5 cartas de um baralho usual de 52 cartas (13 de cada variedade - paus, ouros, espadas, copas).

1.a) Determine o número de elementos do espaço de resultados e dê um exemplo de um elemento desse espaço.

1.b) Qual é a probabilidade de obter uma sequência de 5 cartas de Ouros? justifique.

Soluções:

1.a) O número de elementos do espaço de resultados desta experiência, ou seja, o total de sequências possíveis na extração das 5 cartas, pode ser determinado usando o Princípio da Multiplicação ou Arranjos sem repetição. Podemos escolher 5 cartas, sucessivamente ou uma a uma, de um baralho com 52 cartas de $52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 = 311875200$ maneiras.
De forma equivalente, podemos usar os arranjos sem repetição:

$$^{52}A_5 = \frac{52!}{(52-5)!} = \frac{52!}{47!} = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 = 311875200$$

Um elemento do espaço de resultados pode ser a seguinte sequência: (valete de paus; sete de espadas; três de ouros; cinco de copas; ás de paus).

1.b) A probabilidade será igual ao quociente entre o número de casos favoráveis à situação indicada - todas as 5 cartas são de Ouros - , e o número total de casos possíveis (todas as maneiras/sequências possíveis).
Número de casos possíveis - corresponde ao total calculado em em 1. a).
O número de casos favoráveis - todas as sequências de 5 cartas de ouros (sendo cartas retiradas sucessivamente, identifica-se a ordem de saída). São todas as permutações possíveis de 5 cartas retiradas das 13 do naipe ouros. Novamente, o total de casos pode ser obtido pelo princípio da multiplicação ou pelos arranjos sem repetição: $13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 154440$
Por fim, calculamos a probabilidade calculando o quociente do número de casos favoráveis pelo número total de casos possíveis: $\dfrac{154440}{311875200}$

Uma pergunta alternativa, na área das probabilidades e estatística descritiva é a seguinte:
1. (3 valores) Os 300 habitantes de um pequeno bairro da periferia da capital do país responderam a uma sondagem, indicando o número de vezes que foram a uma consulta Medicina Familiar nos últimos 6 meses. 60 habitantes responderam não ter ido a nenhuma consulta. A tabela seguinte resume os resultados:

1.a) Complete o quadro de frequências utilizando a informação dada, transcrevendo para a folha de ponto e justificando os cálculos.

1.b) Quais são a moda, média e mediana do número consultas?

1.c) Se escolhermos ao acaso um habitante do bairro, qual a probabilidade deste ter realizado no máximo 2 consultas de medicina familiar?

Nº de consultas medicina familiar	n_i	f_i	F_i
0	$n_1 = 60$	0,2	0,2
1	$n_2 = 150$	0,50	0,70
2	$n_3 = 75$	0,25	0,95
3	$n_4 = 15$	0,05	1

n_i representa frequência absoluta, f_i representa frequência relativa simples, F_i representa frequência relativa acumulada.

Soluções:

1.a) Havendo 60 habitantes que não foram ao médico, i. e., foram a 0 (zero) consultas de medicina familiar, em 300 habitantes, facilmente se determina que a frequência relativa de 0 é $f = 0,2$ ou 20%.
Sendo que 50% dos habitantes foram apenas a uma consulta - frequência relativa de 0,5 - quer dizer que são 150 os habitantes nesta situação.

Os restantes em falta obtêm-se por diferença, ou seja $n_4 = 300 - 60 - 150 - 75 = 15$ e $f_4 = 1 - 0,2 - 0,5 - 0,25 = 0,05$
As frequência acumuladas obtêm-se facilmente por acumulação das freq. relativas.

1.b) A moda é o valor do acontecimento/característica em estudo que tem a frequência absoluta (ou relativa) mais elevada. Então, a moda é **1**, pois é o número de consultas de medicina familiar com maior frequência.

A média pode ser calculada fazendo a soma dos produtos entre o valor da variável em estudo (número de consultas) e a sua frequência relativa. Cálculo de média em tabela de frequências.

$$\bar{x} = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,5 + 2 \times 0,25 + 3 \times 0,05 = 1.15$$

Em média, os habitantes do bairro foram a 1.15 consultas nos 6 meses.
A mediana é o valor que acumula 50% das observações. Neste caso olhando para as frequências acumuladas, verifica-se que sendo $F_1 = 0,70$, é em **1** consulta médica que se encontra a mediana (em 0 só acumula 20% dos habitantes, em 1 é o primeiro que acumula 50% ou mais)

1.c) A probabilidade de ter ido **no máximo a 2** consultas determina-se considerando as situações possíveis. No máximo 2 consultas é o mesmo que dizer - foi a 0 consultas,

OU foi a 1 consulta, **OU** foi a 2 consultas. Resumindo, **foi a 2 consultas ou menos**. Assim a probabilidade é a acumulada até 2, P(no maximo 2 consultas) $= 0,95$

2. (4 valores) Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2} - n$

b) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^3+1}$

Solução:

a) Cálculo de um limite em n utilizando um 'artifício' bem conhecido, que é multiplicar e dividir pela expressão conjugada da expressão dada.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2} - n = \infty - \infty$ (indeterminação)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+2}-n)(\sqrt{n^2+2}+n)}{(\sqrt{n^2+2}+n)}$$
$$= lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2-n^2}{(\sqrt{n^2+2}+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\sqrt{n^2+2}+n)} = 0$$

b) Cálculo de um limite de uma função em $\mathbb{R}$, usando a fatorização dos polinómios.

$\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^3+1} = \dfrac{0}{0}$ (indicar que é indeterminação).

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^3+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x^2-x+1} = -2/3$$

nota: recorde que (a^2-b^2), é uma diferença de quadrados e é igual a $(a-b)\times(a+b)$, neste caso, $(x^2-1^2) = (x+1)(x-1)$

3. (4 valores) a) Determine o domínio e os zeros de

a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{1-|\cos(x)|}$

Solução:

a) Domínio:

O denominador tem que ser não nulo, para que o quociente exista, então procuramos os valores de x tais que $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1$ o que é equivalente a ter, para o expoente, $x \neq 0$.

O argumento de ln (logaritmo neperiano (na base e) tem que ser positivo, portanto é procurar os valores de x que tornam a fração positiva, $1/(e^x - 1) > 0$ ou seja $x > 0$.

Concluímos que o domínio é $x > 0$.

Zeros da função: determinar para que valores de x a expressão da função se anula.

$\ln(1/(e^x - 1)) = 0 \Leftrightarrow 1/(e^x - 1) = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 2$
ou seja $x = \ln(2)$.

b) Domínio:

O argumento da raíz tem que ser não-negativo (≥ 0) e o denominador tem que ser não-nulo ($\neq 0$), portanto o domínio é determinado resolvendo

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ e portanto, o argumento da raíz é não-negativo para $x \leq 1$ ou $x \geq 2$ e anula-se para $x = 1, 2$.

nota: recorde uma forma de verificar o sinal de um polinómio de 2o grau. fora das raízes do polinómio tem o sinal de **a**, coeficiente de x^2, (que aqui é positivo), e entre as raízes tem o sinal contrário ao de **a** (neste exercício o polinómio é negativo entre 1 e 2).

$1 - |cos(x)|$ anula-se sempre que $cos(x) = 1$ em valor absoluto, ou seja, para todos os x que se escrevam como $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (exemplos $x = ... - 3\pi, -2\pi - 1\pi, \pi, 2\pi, 3\pi, ...$).

Finalmente, o domínio é a intersecção das duas condições: todos os pontos em que o polinómio é não nulo, excetuando os x que anulam o denominador.

$$D = (]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[) \setminus \pi\mathbb{Z}$$

Zeros: $x = 1, 2$.

4. (4 valores) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$$

onde a e b são números reais.

a) Assumindo $b = -1$, determine a de forma a que f seja contínua em $x = 1$.

b) Determine a e b de forma a que f seja diferenciável em $x = 1$.

Solução:

a) A continuidade em $x = 1$ implica ter os dois ramos da função iguais nesse ponto: $(1/x) = ax + b$ para $x = 1$. Como $b = -1$, fica $1 = a - 1$, portanto $a = 2$.

b) A derivada de $1/x$ (um quociente) é $-1/x^2$, que tem valor -1 para $x = 1$. Então é condição necessária para que exista diferenciabilidade em $x = 1$ que o declive da recta $ax + b$ seja $a = -1$. Por continuidade da função, terá que se verificar $1/x = ax + b$ em $x = 1$, portanto $1 = -1 + b$, ou $b = 2$.

5. (5 valores) Calcule as seguintes derivadas:

a) $f(x) = e^{x \cos x}$

b) $\dfrac{\sin(2x)}{x^2}$

Solução: mostrar que conhece as regras de derivação do produto de duas funções, da função composta, do quociente, da potência, e apresentar os cálculos o mais desenvolvidos possível.

a)
$$f'(x) = (x \cos x)' e^{x \cos x} = (\cos x - x \sin(x)) e^{x \cos x}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(2x)}{x^2} &= \frac{(\sin(2x))' x^2 - \sin(2x)(x^2)'}{x^4} \\
&= \frac{(2x)'(\sin'(2x))x^2 - \sin(2x)2x}{x^4} \\
&= \frac{2\cos(2x)x^2 - 2x\sin(2x)}{x^4} \\
&= \frac{2x\cos(2x) - 2\sin(2x)}{x^3}
\end{aligned}$$

FIM