## Exame de Acesso Específico | Matemática | Prova modelo 2025

### Proposta de Resolução Sintética

### Parte A - Escolha múltipla

**1.** (D) **2.** (E) **3.** (C) **4.** (D) **5.** (B) **6.** (B)

### Parte B

**1.** Um professor pede a 40 estudantes para realizarem um miniteste de revisão. Os resultados (1 a 10 valores) foram:

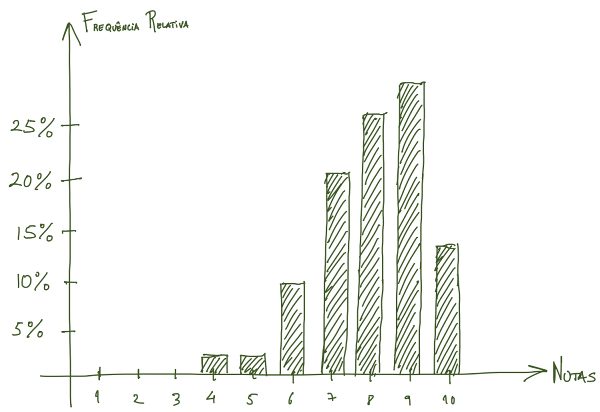
**a)** Complete a tabela.

| Notas | Nº de Alunos | Frequência Acumulada |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 2 |
| 6 | 4 | 6 |
| 7 | 8 | 14 |
| 8 | 10 | 24 |
| 9 | 11 | 35 |
| 10 | 5 | 40 |

A tabela foi completada tendo em linha de conta que $F_n = F_{n-1} + f_n$ onde $F_n$ é a frequência acumulada da classe $n$, $F_{n-1}$ é a frequência acumulada da classe $n-1$ (ou seja da classe anterior a $n$) e $f_n$ é a frequência simples da classe $n$. Por exemplo, $F_6 = 6$, $f_7 = 8$ o que implica que $F_7 = F_6 + f_7 = 6 + 8 = 14$.

**b)** Desenhe o gráfico de barras considerando as frequências relativas e determine a moda.

| Notas | Nº de Alunos | Frequência relativa |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 = 0% |
| 2 | 0 | 0 = 0% |
| 3 | 0 | 0 = 0% |
| 4 | 1 | 1/40 = 0,025= 2,5% |
| 5 | 1 | 1/40 = 0,025= 2,5% |
| 6 | 4 | 4/40 = 0,1= 10% |
| 7 | 8 | 8/40 = 0,2= 20% |
| 8 | 10 | 10/40 = 0,25= 25% |
| 9 | 11 | 11/40 = 0,275= 27,5% |
| 10 | 5 | 5/40 = 0,125= 12,5% |




A moda é o valor com maior frequência relativa, logo a moda é $9$.

2. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) & \text{se } x > 0 \\ e^x - 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

onde $\ln$ é o logaritmo na base e.
a) Determine o domínio de $f$ e os seus zeros, caso existam. Justifique.

- Começamos por estudar quando $x > 0$. Como o argumento do logaritmo tem que ser positivo exigimos que $1 - x > 0$ ou seja $x < 1$. Juntando as duas condições $x > 0$ e $x < 1$ obtemos o intervalo $]0, 1[$.

- Agora vamos considerar $x \leq 0$. Neste caso não temos nenhuma restrição a fazer pois o domínio da função $e^x$ é $\mathbb{R}$ (assim como o domínio da função $e^x - 1$). Em resumo o domínio de $f$ é $]-\infty, 0]\cup]0, 1[=]-\infty, 1[$.

- Para calcularmos os zeros de $f$ vamos novamente analisar os dois casos:
- Caso $x > 0$, teremos $\ln(1-x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Mas o zero obtido não está no intervalo em estudo logo concluímos que $f$ não tem zeros quando $x > 0$.
- Caso $x \leq 0$, teremos $\mathrm{e}^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ e neste caso $0 \in ]-\infty, 0]$ concluindo que o único zero de $f$ é $x = 0$.

**b)** Estude a continuidade de $f$ no seu domínio.

- Começamos por estudar quando $0 < x < 1$. Como o logaritmo é uma função contínua no seu domínio teremos que $f$ é contínua em $]0, 1[$.
- Agora vamos considerar $x < 0$. Como função exponencial é uma função contínua em $\mathbb{R}$, a função constante igual a 1 é contínua e a subtração de funções contínuas ainda é uma função contínua, concluímos que $f$ é contínua em $]-\infty, 0[$.
- O único ponto do domínio que resta estudar a continuidade é em $x = 0$. Vamos calcular os limites laterais: Por um lado,

  $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(1-x) = \ln 1 = 0,$$

  e por outro

  $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^x - 1 = \mathrm{e}^0 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

  Como os limites laterais coincidem com $f(0)$ teremos que a função $f$ é contínua em $x = 0$.
- Em resumo $f$ é contínua em todo o seu domínio.

**3.** Calcule a derivada das seguintes funções:
**a)** $f(x) = x^3 \cos x$, onde $\cos$ representa a função trigonométrica cosseno.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 \cos x)' \overset{\text{Regra derivação produto}}{=} (x^3)' \cos x + x^3 (\cos x)' \\ &= 3x^2 \cos x - x^3 \sin x, \end{aligned}$$

onde usamos a regra $(x^n)' = nx^{n-1}$ para $n \in \mathbb{N}$ e a regra $(\cos x)' = -\sin x$.

**b)** $g(x) = \dfrac{\ln(2x)}{\mathsf{e}^x + 1}$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{\ln(2x)}{\mathsf{e}^x+1}\right)' \stackrel{\text{Regra derivação quociente}}{=} \frac{(\ln(2x))'(\mathsf{e}^x+1) - \ln(2x)(\mathsf{e}^x+1)'}{(\mathsf{e}^x+1)^2} \\ &= \frac{\frac{2}{2x}(\mathsf{e}^x+1) - \ln(2x)\mathsf{e}^x}{(\mathsf{e}^x+1)^2} = \frac{\frac{1}{x}(\mathsf{e}^x+1) - \ln(2x)\mathsf{e}^x}{(\mathsf{e}^x+1)^2}, \end{aligned}$$

aqui usamos a regra da derivada da função composta $(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ (onde $u$ é função derivável), a regra $(\mathsf{e}^x)' = \mathsf{e}^x$, a regra $C' = 0$ (derivada de uma constante é 0) e, finalmente, a regra que afirma que a derivada da soma é a soma das derivadas.

FIM